MACIERZE LOSOWE
LISTA 3
Twierdzenie Wignera

1. Skonstruować dwa ciągi etykiet $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$, każdy o długości 6, takie że zdefiniowane przez nie grafy są rozłączne i jeden z nich jest drzewem, a drugi cyklem oraz w obu grafach wszystkie krawędzie są odwiedzane dwukrotnie przez spacery zdefiniowane przez te ciągi etykiet. Obliczyć
$$\mathbb{E}(X(\vec{i})X(\vec{j})) - \mathbb{E}(X(\vec{i}))\mathbb{E}(X(\vec{j})),$$
wyznaczyć liczność zbioru etykiet, które dają graf utworzony z tych dwóch grafów, ale zauważyć, że przy założeniach Twierdzenia Wignera (Tw.2) nie daje on wkładu do obliczanej w dowodzie tego twierdzenia wariancji (notacja jak na wykładzie).

2. Skonstruować dwa ciągi etykiet $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$, każdy o długości 6, takie że zdefiniowane przez nie grafy mają dokładnie jedną wspólną krawędź i oba z nich są drzewami oraz w obu grafach wszystkie krawędzie są odwiedzane dwukrotnie przez spacery zdefiniowane przez te ciągi etykiet. Obliczyć
$$\mathbb{E}(X(\vec{i})X(\vec{j})) - \mathbb{E}(X(\vec{i}))\mathbb{E}(X(\vec{j})),$$
wyznaczyć liczność zbioru etykiet, które dają graf utworzony z tych dwóch grafów, oraz uzasadnić, że przy założeniach Twierdzenia Wignera (Tw.2) daje on wkład rzędu $\mathcal{O}(1/n^2)$ do obliczanej w dowodzie tego twierdzenia wariancji.

3. Niech $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ będzie rzeczywistą macierzą losową Wignera. Przyjmując takie złożenia jak w twierdzeniu Wignera, pokazać, że wkład do wariancji
$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(X_n^k)\right)$$
grafów spójnych o $k+1$ wierzchołkach jest równy zeru. W tym celu zbadać wyrażenie postaci
$$\mathbb{E}(X(\vec{i})X(\vec{j})) - \mathbb{E}(X(\vec{i}))\mathbb{E}(X(\vec{j}))$$
dla odpowiednich $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$ i uzasadnić, że jest ono zawsze równe zeru jeżeli $|V| = k+1$. Wywnioskować z tego faktu i dowodu twierdzenia Wignera (Tw.2), że powyższa wariancja jest tak naprawdę rzędu $\mathcal{O}(1/n^2)$ (na wykładzie pokazaliśmy, że jest $\mathcal{O}(1/n)$).

4. Pokazać, że zachodzi nierówność Markowa w następującej uogólnionej wersji
$$\mu(\{x : |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_X |f(x)|d\mu(x)$$
dla dowolnej funkcji mierzalnej f na przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}, \mu)$ o wartościach w rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych, gdzie $a > 0$.

5. Niech będzie dana zmienna losowa X o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Oszacować $P(X > 3)$, stosując (a) nierówność Markowa, (b) nierówność Czebyszewa.

6. Przez *Hermitowską macierz Wignera* będziemy rozumieć $n \times n$ hermitowską macierz

$$X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{i,j}),$$

taką, że $\{\mathrm{Re}(X_{i,j}), \mathrm{Im}(X_{i,j}) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ jest rodziną rzeczywistych niezależnych zmiennych losowych o średniej zero i takich że

$$2\mathbb{E}((\mathrm{Re}X_{i,j})^2) = 2\mathbb{E}((\mathrm{Im}X_{i,j})^2) = \mathbb{E}(X_{j,j}^2) = t$$

dla wszystkich i, j, takich że $i \neq j$, gdzie $t > 0$, oraz wszystkich momentach skończonych. Pokazać, że dla Hermitowskich macierzy Wignera zachodzi twierdzenie analogiczne do Tw. 1 (zbieżność momentów pod wartością oczekiwaną znormalizowanego śladu do liczb Catalana). Analiza sprowadza się do analizy kombinatoryki par (G, w), gdzie G jest grafem, a w jest spacerem na tym grafie, podobnie jak w przypadku rzeczywistym, niemniej są pewne modyfikacje.

Romuald Lenczewski